Il metodo
delle differenze finite

PROBLEMI STATICI

note per il corso di
"Metodi numerici per l'elettromagnetismo"

a cura di M. Politi - Politecnico di Milano - a.a. 2004/05

Generalità

- La soluzione di un problema elettrostatico (o magnetostatico) comporta la soluzione di un equazione differenziale, con le opportune condizioni al contorno
- Il metodo si basa sulla discretizzazione della funzione Φ su un reticolo cartesiano
- La soluzione del problema viene così ridotta alla soluzione di un sistema lineare di equazioni

2

Impostazione classica

Un campo elettrostatico è governato in generale dall'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

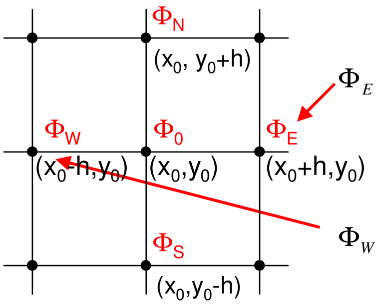
che in coordinate cartesiane, nel caso 2D, vale:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

3

Impostazione classica (2)

Sviluppando Φ(x,y) in serie di Fourier nell'intorno del punto (x_0, y_0), per x = $x_0 \pm h$, si trova:



$$\Phi_E = \Phi_0 + h\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x^3} + O\left(h^4\right)$$

$$\Phi_W = \Phi_0 - h\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x^3} + O\left(h^4\right)$$

da cui:

$$\Phi_E + \Phi_W = 2\Phi_0 + h^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + O(h^4) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = \frac{\Phi_E + \Phi_W - 2\Phi_0}{h^2} + O\left(h^2\right)$$

4

Impostazione classica (3)

Valendo quindi:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\Phi_N+\Phi_S+\Phi_E+\Phi_W-4\Phi_0}{h^2}+O\left(h^2\right)$$

l'approssimazione dell'equazione di Poisson diventa:

$$\frac{\Phi_N+\Phi_S+\Phi_E+\Phi_W-4\Phi_0}{h^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

ovvero:

$$\Phi_N+\Phi_S+\Phi_E+\Phi_W-4\Phi_0=-\frac{\rho}{\varepsilon}h^2$$

equazione alle differenze

5

Impostazione classica (4)

- Un'equazione alle differenze risulta così associabile a ogni nodo del reticolo
- Equazioni speciali vanno utilizzate sul contorno
- La soluzione del sistema lineare di equazioni, nelle incognite $\{\Phi_i\}$, fornisce un'approssimazione discreta dell'andamento di $\Phi(x,y)$
- Problema: la derivazione delle eq. alle differenze al contorno e in presenza di disomogeneità risulta laboriosa

6

Impostazione integrale

La legge di Gauss:

$$\underbrace{\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}}_{\text{flusso elettrico uscente}} = \int_V \rho\, dV$$

tenendo conto che:

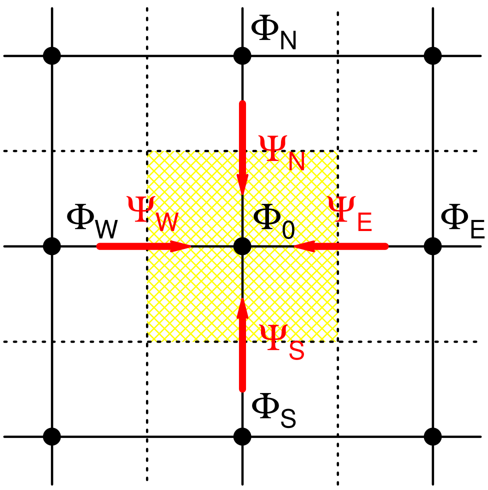
$$\vec{D} = -\varepsilon \nabla\Phi$$

può essere scritta nella forma:

$$\underbrace{\int_S \varepsilon\nabla\Phi\cdot d\vec{S}}_{\text{flusso elettrico entrante}} = -\int_V \rho\, dV$$

7

Impostazione integrale (2)



$$\Psi_N \cong \underbrace{\underbrace{\varepsilon E_N}_{\text{densità di flusso}}\quad h}_{\text{flusso per u. di l.}}$$

$$\cong \varepsilon \frac{\Phi_N - \Phi_0}{h} h$$

$$\cong \varepsilon\left(\Phi_N - \Phi_0\right)$$

$$\Psi_S \cong \varepsilon\left(\Phi_S - \Phi_0\right)$$

$\ldots$

8

Impostazione integrale (3)

$$\int_{S_0} \varepsilon \Delta\Phi \cdot d\vec{S} = \Psi_N + \Psi_S + \Psi_E + \Psi_W$$

$$\cong \varepsilon(\Phi_N - \Phi_0) + \varepsilon(\Phi_S - \Phi_0) + \varepsilon(\Phi_E - \Phi_0) + \varepsilon(\Phi_W - \Phi_0)$$

$$\cong \varepsilon(\Phi_N + \Phi_S + \Phi_E + \Phi_W - 4\Phi_0)$$

$$\int_{V_0} \rho \, dV \cong \rho_0 h^2$$

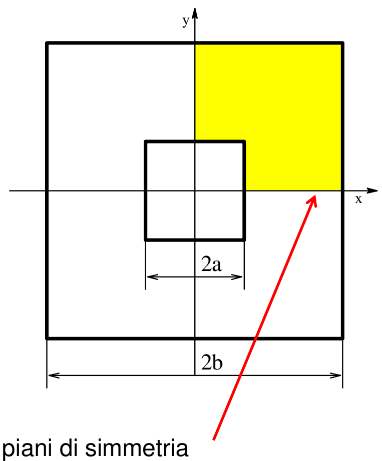
$$\Downarrow$$

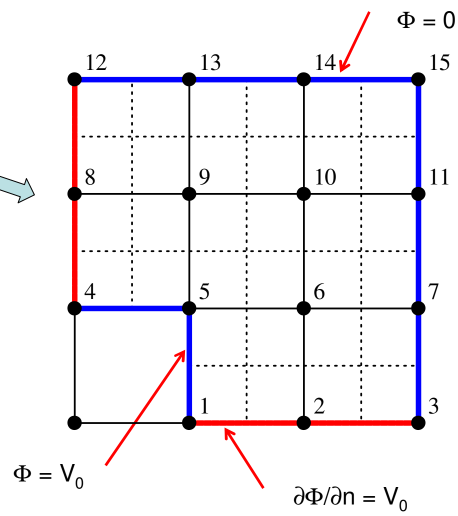
$$\varepsilon(\Phi_N + \Phi_S + \Phi_E + \Phi_W - 4\Phi_0) = -\rho_0 h^2$$

$$\boxed{\Phi_N + \Phi_S + \Phi_E + \Phi_W - 4\Phi_0 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} h^2}$$

9

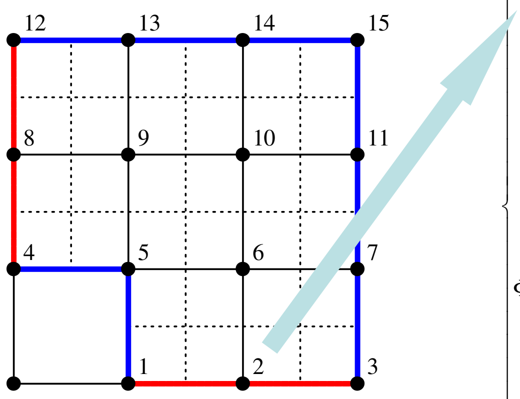
Esempio: coassiale quadrato





10

Sistema lineare di equazioni



$$
\begin{cases}
\Phi_1 = V_0 \\
\frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}\Phi_3 + \Phi_6 - 2\Phi_2 = 0 \\
\Phi_3 = 0 \\
\Phi_4 = V_0 \\
\Phi_5 = V_0 \\
\Phi_2 + \Phi_5 + \Phi_7 + \Phi_{10} - 4\Phi_6 = 0 \\
\Phi_7 = 0 \\
\frac{1}{2}\Phi_4 + \Phi_9 + \frac{1}{2}\Phi_{12} - 2\Phi_8 = 0 \\
\Phi_5 + \Phi_8 + \Phi_{10} + \Phi_{13} - 4\Phi_9 = 0 \\
\Phi_6 + \Phi_9 + \Phi_{11} + \Phi_{14} - 4\Phi_{10} = 0 \\
\Phi_{11} = 0 \\
\Phi_{12} = 0 \\
\Phi_{13} = 0 \\
\Phi_{14} = 0 \\
\Phi_{15} = 0
\end{cases}
$$

11

Equazione matriciale equivalente

$$
\begin{cases}
\Phi_1 = V_0 \\
\frac{1}{2}\Phi_1 - 2\Phi_2 + \frac{1}{2}\Phi_3 + \Phi_6 = 0 \\
\Phi_3 = 0 \\
\Phi_4 = V \\
\Phi_5 = V \\
\Phi_2 + \Phi_5 - 4\Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_{10} = 0 \\
\cdots \\
\Phi_{15} = 0
\end{cases}
$$

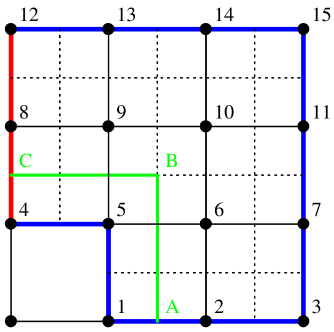
A Φ = C

$$
\begin{bmatrix}
1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
1/2 & -2 & 1/2 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & 1 & \circ & \circ & 1 & -4 & 1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & & \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \vdots \\ \Phi_{15}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
V_0 \\ \circ \\ V_0 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ
\end{bmatrix}
$$

12

Calcolo della capacità per u. di l.

Applicando la legge di Gauss si trova:



$$\frac{Q'}{\varepsilon} = \int_{A-B-C} (-\nabla\Phi)\cdot d\vec{S}$$

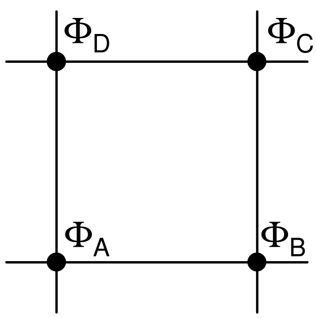
$$\cong E_{1-2}\frac{h}{2} + E_{5-6}h + E_{5-9}h + E_{4-8}\frac{h}{2}$$

$$\cong \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} + (\Phi_5 - \Phi_6) +$$

$$+(\Phi_5 - \Phi_9) + \frac{\Phi_4 - \Phi_8}{2}$$

13

Calcolo energetico



$$E_{xi} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi_A - \Phi_B}{h} + \frac{\Phi_D - \Phi_C}{h}\right)$$

$$E_{yi} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi_A - \Phi_D}{h} + \frac{\Phi_B - \Phi_C}{h}\right)$$

$$E_i^2 = E_i^2 + E_i^2$$

$$\cong \frac{(\Phi_A - \Phi_C)^2 + (\Phi_B - \Phi_D)^2}{2h^2}$$

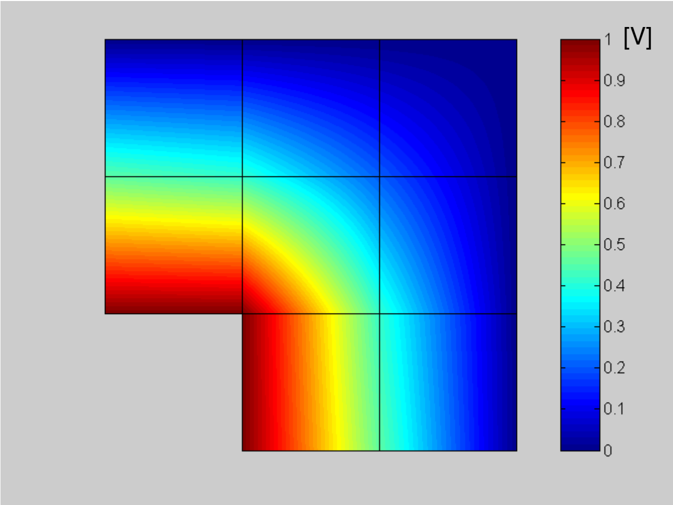
$$U'_e \cong \frac{1}{2}\varepsilon E_i^2 h^2$$

$$\cong \varepsilon \frac{(\Phi_A - \Phi_C)^2 + (\Phi_B - \Phi_D)^2}{4}$$

$$C' = \frac{2U'_e}{V_0^2} \cong \frac{2\sum_i U'_{ei}}{V_0^2}$$

14

Andamento Φ (h/a = 1)

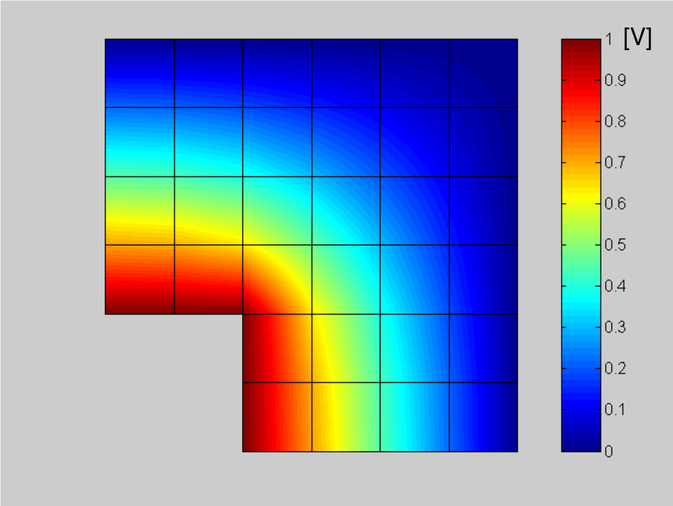


$$\frac{\tilde{C}}{\varepsilon} = 4 \times 1.5694$$
$$= 6.2778$$

$$\frac{C}{\varepsilon} = 6.2155$$

errore
+1.00%

Andamento Φ (h/a = 1/2)

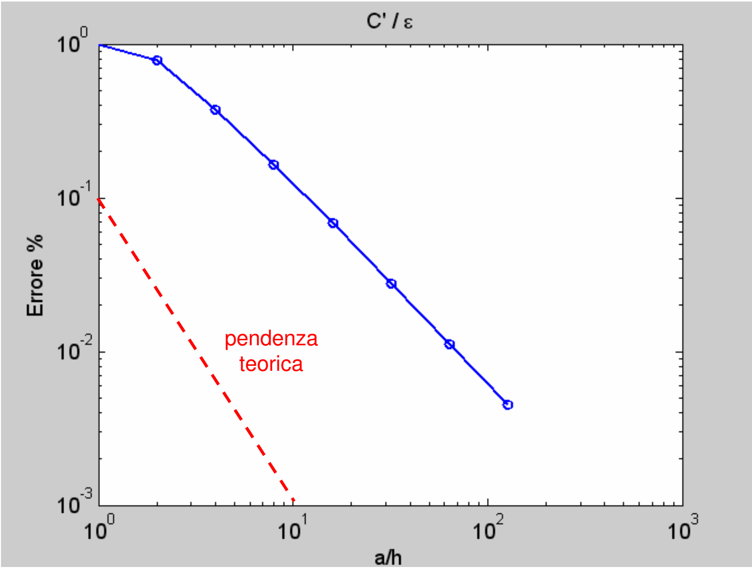


$$\frac{\tilde{C}}{\varepsilon} = 4 \times 1.5661$$
$$= 6.2642$$

$$\frac{C}{\varepsilon} = 6.2155$$

errore
+0.78%

Andamento dell'errore



17