

Il metodo delle differenze finite

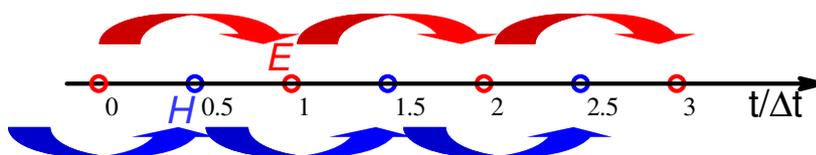
IL METODO FD-TD (Finite Difference-Time Domain)

note per il corso di
“Metodi numerici per l'elettromagnetismo”

a cura di M. Politi - Politecnico di Milano - a.a. 2004/05

Generalità

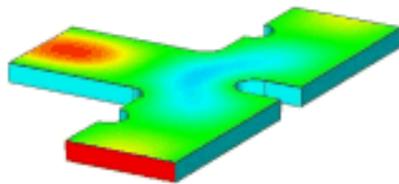
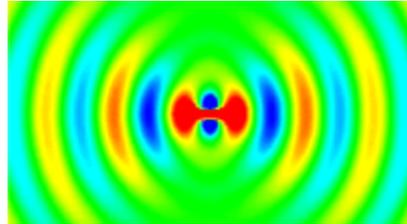
- Il metodo consente la soluzione del campo elettromagnetico nel tempo
- Si basa su una discretizzazione delle grandezze sia nello spazio che nel tempo
- L'algoritmo di soluzione è detto *leap frog*



2

Esempi di applicazioni

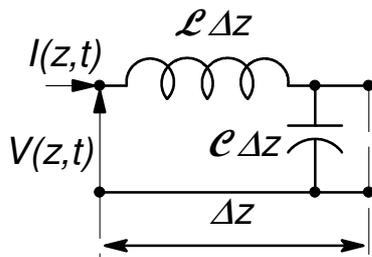
radiazione



propagazione guidata

3

Linea ideale di trasmissione



$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} = -\mathcal{L} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -\mathcal{C} \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases}$$

equazioni del telegrafista

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

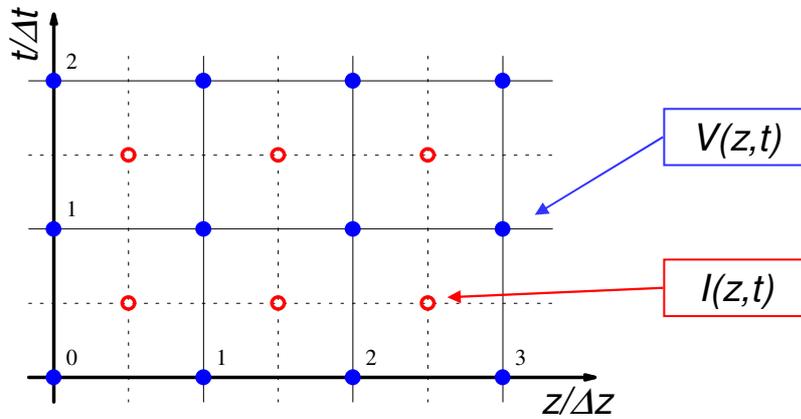
equazione d'onda

$$V = V^+(z - v_p t) + V^-(z + v_p t)$$

con: $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$

4

Discretizzazione delle equazioni



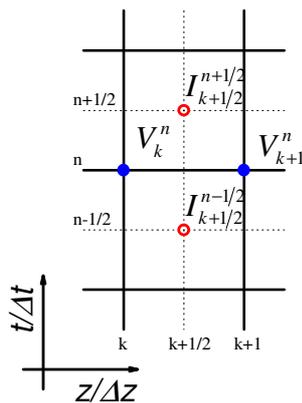
Convenzioni:

$$V_k^n \triangleq V(k\Delta z, n\Delta t)$$

$$I_{k+1/2}^{n+1/2} \triangleq I\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta z, \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$$

5

Discretizzazione delle equazioni (2)



$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\mathcal{L} \frac{\partial I}{\partial t}$$

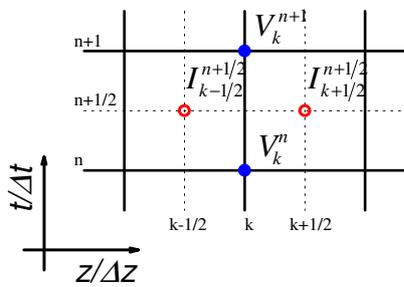


$$\frac{V_{k+1}^n - V_k^n}{\Delta z} = -\mathcal{L} \frac{I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

$$I_{k+1/2}^{n+1/2} = I_{k+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mathcal{L} \Delta z} (V_{k+1}^n - V_k^n)$$

6

Discretizzazione delle equazioni (3)



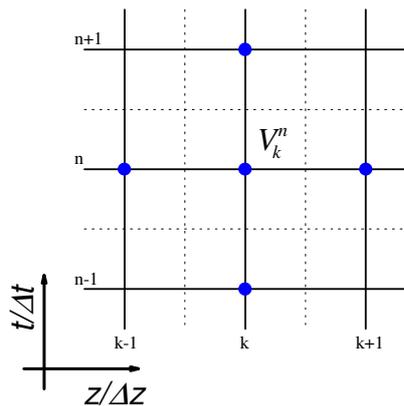
$$\frac{\partial I}{\partial z} = -e \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} = -e \frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\Delta t}$$

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{e \Delta z} (I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2})$$

7

Discretizzazione delle equazioni (4)



$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

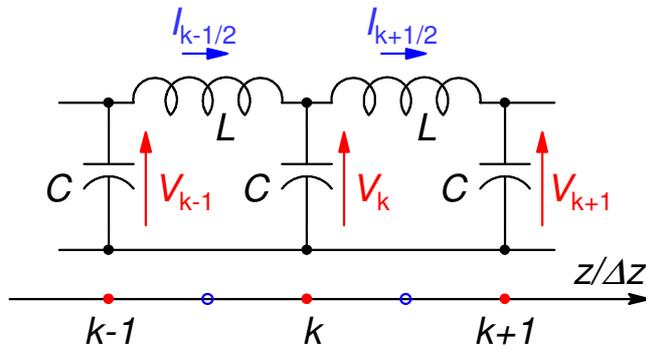
$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \approx \frac{V_k^{n+1} - 2V_k^n + V_k^{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \approx \frac{V_{k+1}^n - 2V_k^n + V_{k-1}^n}{\Delta z^2}$$

$$V_k^{n+1} = 2V_k^n + \left(\frac{v_p \Delta t}{\Delta z} \right)^2 (V_{k+1}^n - 2V_k^n + V_{k-1}^n) - V_k^{n-1}$$

8

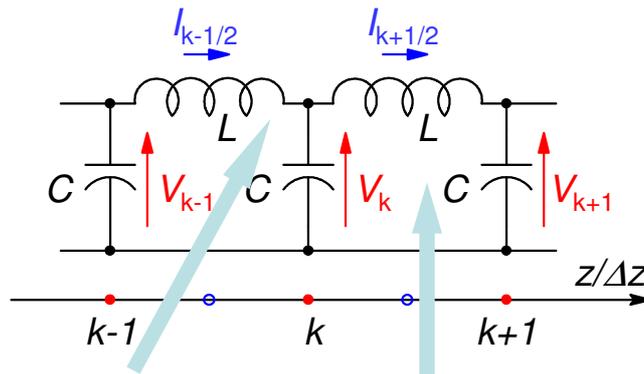
Circuito equivalente



con: $L = \mathcal{L} \Delta z$
 $C = \mathcal{C} \Delta z$

9

Impostazione circuitale



$$I_{k-1/2}^{n+1/2} = I_{k+1/2}^{n+1/2} + I_C^{n+1/2}$$

$$\cong I_{k+1/2}^{n+1/2} + C \frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\Delta t}$$

$$V_k^n = V_{k+1}^n + V_L^n$$

$$\cong V_{k+1}^n + L \frac{I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t}$$

10

Impedenza numerica

Per una cascata infinita di celle LC, si trova:

$$\tilde{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C} - \omega^2 \frac{L^2}{4}} + j\omega \frac{L}{2}$$

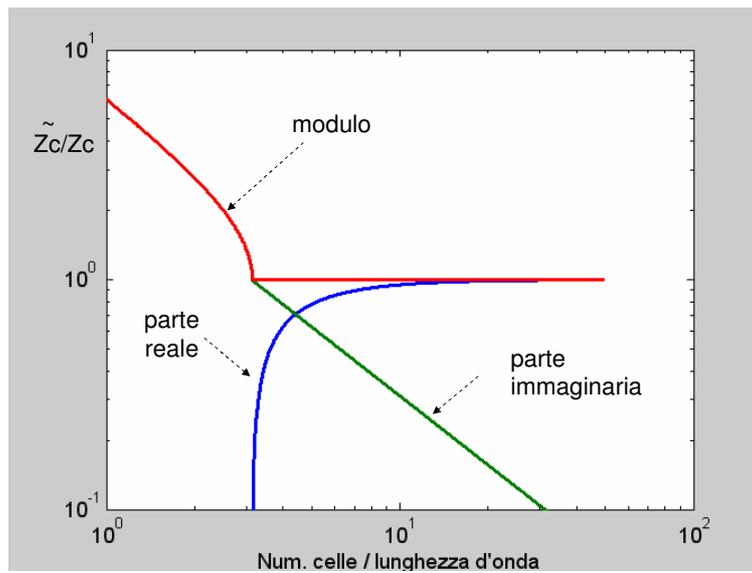
che può essere scritta nella forma:

$$\tilde{Z}_c = Z_c \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right)^2} + j \frac{\pi}{N_\lambda} \right)$$

Avendo definito $N_\lambda = \lambda / \Delta z$.

11

Impedenza caratteristica numerica



12

Dispersione numerica

Assumendo: $V_k^n = V_0 e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{\beta} k \Delta z)}$
 $I_{k+1/2}^{n+1/2} = I_0 e^{j[\omega(n+1/2)\Delta t - \tilde{\beta}(k+1/2)\Delta z]}$

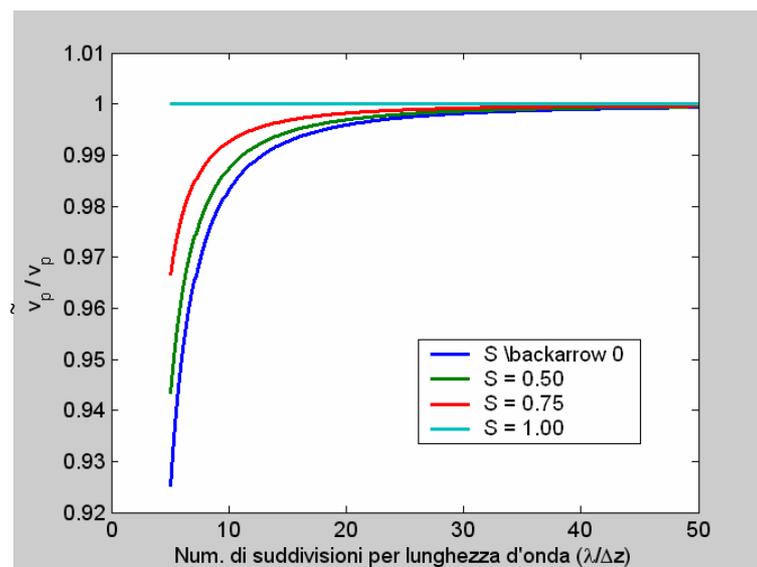
si trova: $\sin \frac{\tilde{\beta} \Delta z}{2} = \frac{\Delta z}{v_p \Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2}$ equazione di dispersione

Essendo $\tilde{\beta} \triangleq \frac{\omega}{\tilde{v}_p}$, definendo $N_\lambda \triangleq \frac{\lambda}{\Delta z}$, $S \triangleq \frac{v_p \Delta t}{\lambda}$

risulta: $\tilde{v}_p = \frac{\pi}{N_\lambda \sin^{-1} \left(\frac{1}{S} \sin \frac{\pi S}{N_\lambda} \right)} v_p$

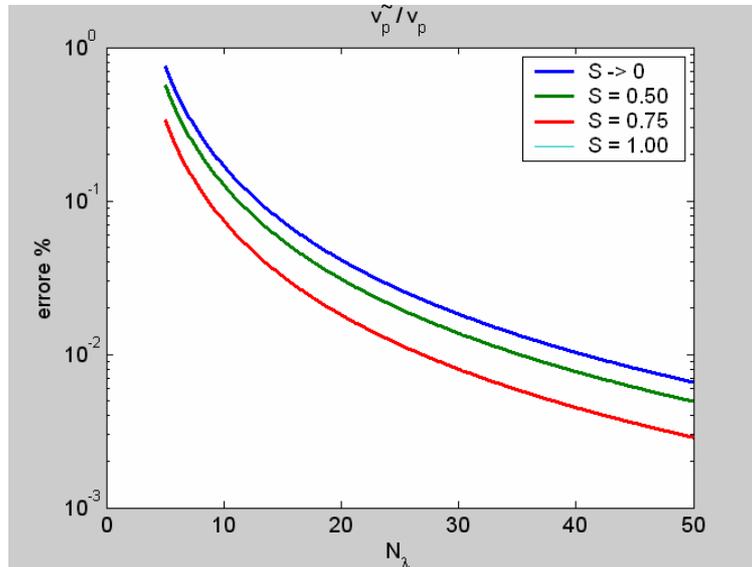
13

Velocità di fase numerica



14

Velocità di fase numerica (2)



15

Stabilità numerica

Dall'equazione di dispersione, assumendo che anche la pulsazione ω sia complessa, si trova poi:

$$\sin \frac{\tilde{\beta}\Delta z}{2} = \frac{\Delta z}{v_p \Delta t} \sin \frac{\tilde{\omega}\Delta t}{2} \Rightarrow \tilde{\omega} = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left(\frac{v_p \Delta t}{\Delta z} \sin \frac{\tilde{\beta}\Delta z}{2} \right)$$

Perché la pulsazione sia reale deve essere:

$$\frac{v_p \Delta t}{\Delta z} = S \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{\Delta z}{v_p} \quad \text{condizione di stabilità}$$

16

Esempio

Per limitare la dispersione numerica occorre:

$$N_\lambda \triangleq \frac{\lambda}{\Delta z} \geq 10 \Rightarrow \Delta z \leq \frac{\lambda}{10}$$

Per la stabilità numerica si richiede:

$$S \triangleq \frac{v_p \Delta t}{\Delta z} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta z}{v_p} = \frac{\lambda}{10 v_p} = \frac{T}{10}$$

N.B.: Il criterio di Nyquist è meno restrittivo, richiedendo $\Delta t \leq T/2$!